Prednáška 4

4.1. Funkcie určené implicitne

Ak je funkcia ľubovoľného argumentu daná explicitným výrazom, je ním daný aj spôsob výpočtu hodnôt funkcie. Môže sa však stať, že funkcia bude zadaná tak, že hodnoty argumentu s príslušnými hodnotami funkcie budú zviazané nejakým vzťahom (napr. inou funkciou). Určite sa každý stretol s otázkou, či možno z rovnice $F(x, y) = 0$ vypočítať y ako funkciu premennej x, alebo ekvivalentne, či množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}$ je grafom nejakej funkcie $f(x)$. Vieme, že krivky môžu byť zadané takouto rovnicou. Ľavá strana rovnice je zloženou funkciou závisiacou na x jednak priamo, jednak prostredníctvom funkcie y (alebo naopak). Odpoveď na takúto otázku nemožno dať jednoznačne ako vidíme na nasledujúcom príklade. Avšak je zrejmé, že deriváciu takej funkcie určíme podľa pravidla o derivovaní zloženej funkcie.

Príklad 4.1.1.

Nech krivka je daná rovnicou $x^2 + y^2 = 1$, potom v okolí bodov $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (-1, 0)$ nie je možné vyjadriť y jednoznačne. Je to zrejmé z toho, že $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ sú dve možné vyjadrenia. Všimnime si, že v týchto bodoch je $|y'(a_i)| = \infty$, $i = 1, 2$ a teda dotyčnice ku krivke sú kolmé na os x. Ako to súvisí s hodnotami

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 - 1)}{\partial y}(a_i),\ i = 1, 2?$$

Implicitne zadanie funkcie je spôsob trochu zložitý, ale často potrebný. Problém však treba formulovať lokálne. Uvažujme rovnicu

$$f(\mathbf{x}, y) = 0,\ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x_0}, r) \subset \mathbb{R}^m,\ y \in (y_0 - \rho, y_0 + \rho)$$

Veta 4.1.2 (Veta o implicitnej funkcii).

Nech funkcia $f : D \to \mathbb{R},\ D = B(\mathbf{x_0}, r)\times(y_0-\rho, y_0+\rho) \subset \mathbb{R}^{m+1},\ r, \rho > 0$ spĺňa nasledujúce podmienky

1. $f(\mathbf{x_0}, y_0) = 0$
2. f má na D spojité parciálne derivácie do rádu $k \geq 1$ vrátane
3. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x_0}, y_0) \neq 0$

Potom existuje $\delta \in (0, r)$ a $\epsilon \in (0, \rho)$ tak, že rovnica $f(\mathbf{x}, y) = 0$ určuje jedinú funkciu $\tilde{y} : \overline{B}(\mathbf{x_0}, \delta) \to [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$, ktorá má spojité parciálne derivácie do rádu k vrátane a platí $\tilde{y}(\mathbf{x_0}) = y_0$. Prvé derivácie možno vyjadriť ako

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tilde{y}(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \tilde{y}(\mathbf{x}))}, \quad \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x_0}, \delta),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Veta sa dá zovšeobecniť na viac implicitne zadaných rovníc.

Veta 4.1.3.

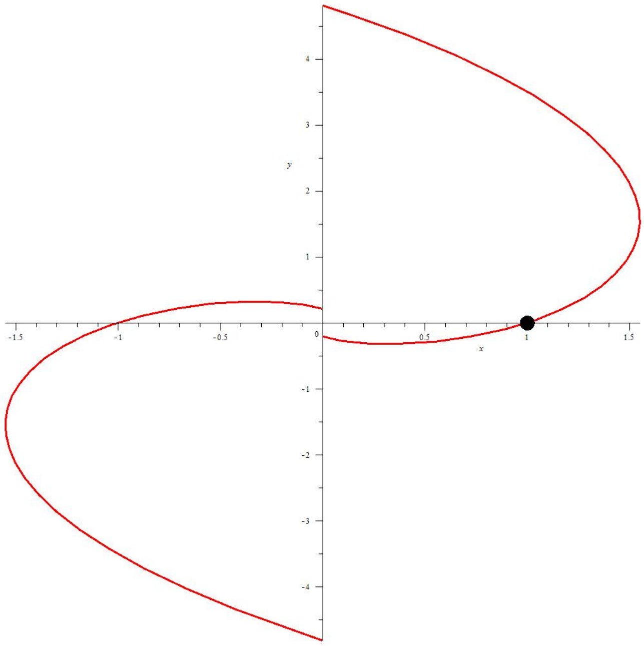
Nech funkcia $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n,\ D = B(\mathbf{x_0}, r) \times B(\mathbf{y_0}, \rho) \subset \mathbb{R}^{m+n},\ r, \rho > 0$ spĺňa nasledujúce podmienky

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) = 0$
2. $\mathbf{f}$ má na D spojité parciálne derivácie do rádu $k \geq 1$ vrátane
3. $\det\left(\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})\right) \neq 0$

Potom existuje $\delta \in (0, r)$ a $\epsilon \in (0, \rho)$ tak, že rovnica $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ určuje jedinú vektorovú funkciu $\tilde{\mathbf{y}} : \overline{B}(\mathbf{x_0}, \delta) \to \overline{B}(\mathbf{y_0}, \epsilon)$, ktorá má spojité parciálne derivácie do rádu k vrátane a platí $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0}$. Prvé derivácie možno vyjadriť ako

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) + \mathbf{f}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))\tilde{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x_0}, \delta).$$

Je dobré si rozmysliet', čo znamenajú "znaky"derivácií v poslednej rovnosti.



Obr. 4.1: Krivka daná implicitne z príkladu 4.1.4.

Príklad 4.1.4.

Ukážeme, že rovnica $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$ určuje v okolí bodu $x = 1, y = 0$ nekonečne spojito derivovateľnú funkciu. Označme

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x}.$$

Platí $f(1,0) = 0$ a funkcia f je v okolí tohoto bodu C^∞. ďalej

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{x=1,y=0} = \frac{y-x}{x^2+y^2}\Big|_{x=1,y=0} \neq 0.$$

Sú teda splnené predpoklady vety 4.1.2 pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$. Tak napríklad pre bod $x = 1, y(1) = 0$ dostaneme $\tilde{y}'(1) = \frac{x+y(x)}{x-y(x)}\Big|_{x=1}$=1.

4.2. Potenciál, divergencia, rotácia

Študentom fyziky nie je nutné význam potenciálu vektorového poľa odôvodňovať. Skalárne pole si môžeme predstaviť ako rozloženie teploty (ako funkciu polohy) v priestore izby, či zemskej atmosféry. V každom mieste zemskej atmosféry existuje aj gravitačná sila, teda máme tu aj gravitačné pole. Z matematického hľadiska je pole funkciou polohy bodu v priestore a budeme predpokladať, že je to jednoznačná funkcia. Zavedieme si najprv rýchlosť zmeny skalárneho poľa na ľubovoľnej zvolenej ”čiare”. Úlohou gradientu je do každého bodu priestoru položiť vektor ukazujúci, ktorým smerom teplota najviac rastie. Veľkosť vektora je určená veľkosťou rastu teploty v danom smere - čím rýchlejšie sa teplota mení, tým väčší je vektor. Smer gradientu je teda smerom najväčšej zmeny danej funkcie.

Definícia 4.2.1.

Vektor

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)(\mathbf{x})$$

nazývame gradient skalára V, ozn. aj grad V.

Problém 4.2.2.

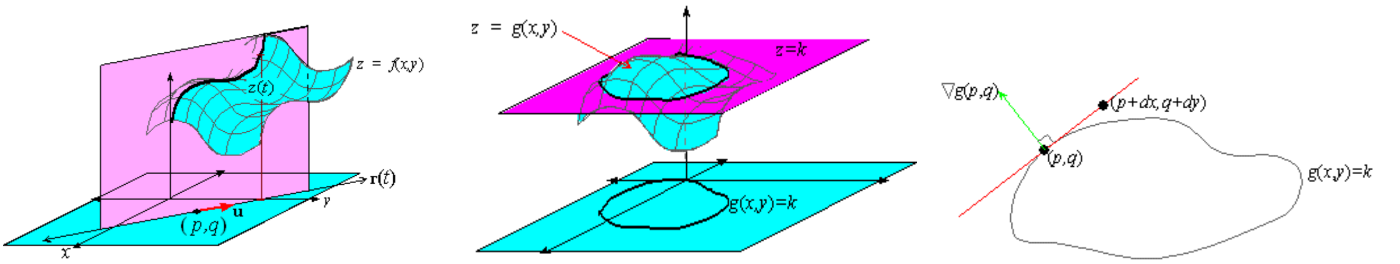
Vypočítajte gradient potenciálu V elektrostatického poľa v okolí jediného náboja a zistite ako súvisí s intenzitu elektrostatického poľa.

Lema 4.2.3.

Nech f je diferencovateľná v bode $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ a $\dfrac{\mathrm{df}(\mathbf{p})}{\mathrm{d}\mathbf{u}} := \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{h}$. Potom derivácia funkcie f v bode $\mathbf{p}$ v smere jednotkového vektora $\mathbf{u}$ je daná vzťahom

$$\frac{\mathrm{df}(\mathbf{p})}{\mathrm{d}\mathbf{u}} = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}.$$

ďalšia dôležitá geometrická vlastnosť gradientu súvisí s vrstevnicami, tj. krivkami v rovine xy, ktoré sú dané rovnicami typu $f(x, y) = c$, f je dostatočne hladké. Platí totiž, že ak bod (x_0, y_0) je bodom danej vrstevnice, tak gradient v tomto bode je normálový vektor k danej vrstevnici v tomto bode, tj. vektor kolmý na dotyčnicu k danej vrstevnici v danom bode. Z toho ihneď vyplýva, že rovnica dotyčnice k vrstevnici $f(\mathbf{x}) = c$ v bode $\mathbf{x}_0$ je daná



(a) Derivácia funkcie $z = f(x, y)$ v bode (p, q) v smere $\mathbf{u}$.

(b) k-ta hladina funkcie g s jej projekciou.

(c) Projekcia smeru gradientu funkcie g v bode (p, q).

Obr. 4.2: Smerová derivácia a gradient.

rovnicou

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Aplikáciou gradientu na skalárne pole dostaneme vektorové pole. Je zrejmé, že ak mám dané skalárne pole, ľahko z neho získam vektorové pole použitím gradientného operátora. častou a ťažšou otázkou vo fyzike je, či dané pole môže vzniknúť použitím (Hamiltonovho) nabla operátora na nejaké hladké skalárne pole. Uvedieme si niektoré základné vlastnosti potenciálu, ako je nutná, či postačujúca podmienka.

Definícia 4.2.4.

Nech $M \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, potom vektorové pole $\mathbf{T} : M \to \mathbb{R}^n$ nazývame potenciálové (konzervatívne), ak existuje funkcia V na M tak, že $\mathbf{T} = \nabla V$ na M. Funkciu V nazývame potenciálom poľa $\mathbf{T}$ na M.

Príklad 4.2.5.

Funkcia $x^2 + y^2$ je zrejme potenciálom na $\mathbb{R}^2$ poľa $\mathbf{T} = (2x, 2y)$. Na druhej strane nie je hneď vidieť, že pole $\mathbf{S} = (y, -x)$ nemá potenciál, viď vetu 4.2.7.

Nasledujúca veta hovorí o tom, že potenciál má podobné vlastnosti ako primitívna funkcia.

Veta 4.2.6.

Ak V je potenciál poľa $\mathbf{T}$ na M, potom aj $\tilde{V} = V$+konšt. je potenciálom poľa $\mathbf{T}$ na M. Ak je naviac M súvislá, potom sa každé dva potenciály poľa $\mathbf{T}$ na M líšia o konštantnú funkciu.

Veta 4.2.7 (Nutná podmienka potenciálnosti poľa)**.**

Ak sú parciálne derivácie poľa $\mathbf{T}$ spojité na $M \subset \mathbb{R}^n$, potom nutná podmienka potenciálnosti poľa je

$$\frac{\partial T_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M, \; i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Zamyslite sa nad podmienkou vo vete a $\operatorname{rot}\mathbf{T}$. Teraz sa pozrieme na postačujúcu podmienku, ktorá je oproti nutnej podmienke v prípade ľubovoľnej množiny väčším problémom. Odpoveď na túto otázku si zodpovieme až po zavedení krivkových integrálov. Nasledujúca veta hovorí o postačujúcej podmienke na viacrozmernom otvorenom intervale.

Veta 4.2.8 (Postačujúca podmienka potenciálnosti poľa)**.**

Ak sú parciálne derivácie poľa $\mathbf{T}$ spojité na otvorenom intervale $J \subset \mathbb{R}^n$ a platí

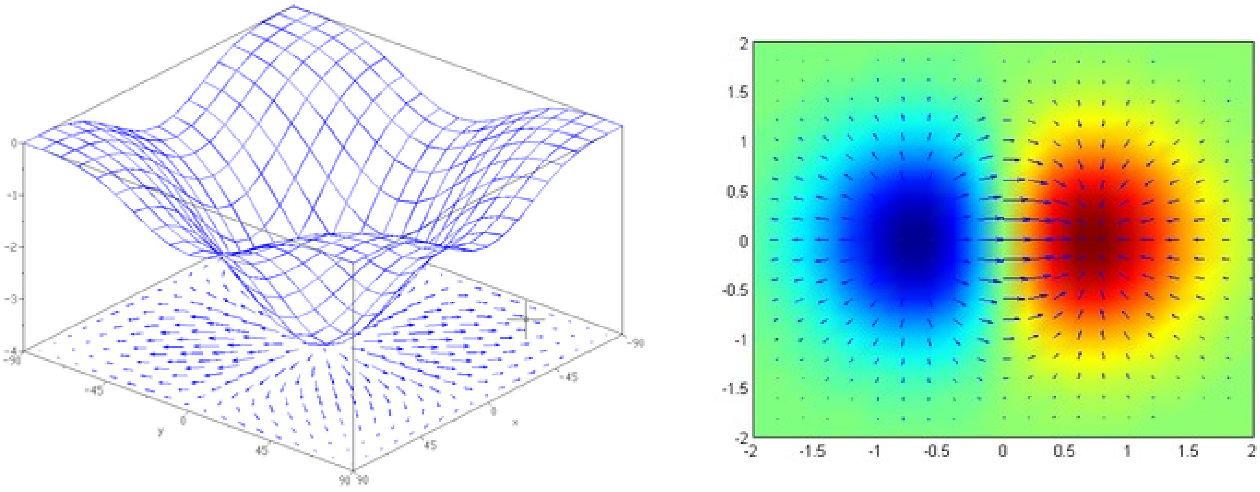
$$\frac{\partial T_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in J, \; i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Potom má pole $\mathbf{T}$ na J potenciál, ktorý je daný vzorcom

$$V(\mathbf{x}) = \int_{a_1}^{x_1} T_1(\xi_1, a_2, \ldots, a_n)\,\mathrm{d}\xi_1 + \int_{a_2}^{x_2} T_2(x_1, \xi_2, a_3, \ldots, a_n)\,\mathrm{d}\xi_2 + \cdots +$$

$$+ \int_{a_n}^{x_n} T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n + \text{konšt.},$$

kde $\mathbf{a}$ je ľubovoľný bod z J.



(a) Skalárne pole $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ (b) Skalárne pole $f(x, y) = -(\cos^2 x + \cos^2 y)^2$

Obr. 4.3: Gradientné polia ako projekcie rastov (klesaní) skalárnych polí.

Príklad 4.2.9.

Nech $T_1(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $T_2(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $x, y \in M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Na M platí

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Keby malo $\mathbf{T}$ na M potenciál, potom by muselo platiť

$$H \overset{def}{=} \int_{-1}^{1} T_1(s, -1)\,\mathrm{d}s + \int_{-1}^{1} T_2(1, u)\,\mathrm{d}u + \int_{1}^{-1} T_1(s, 1)\,\mathrm{d}s + \int_{1}^{-1} T_2(-1, u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\partial V}{\partial x}(s, -1)\,\mathrm{d}s + \int_{-1}^{1} \frac{\partial V}{\partial y}(1, u)\,\mathrm{d}u + \int_{1}^{-1} \frac{\partial V}{\partial x}(s, 1)\,\mathrm{d}s + \int_{1}^{-1} \frac{\partial V}{\partial y}(-1, u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= V(1, -1) - V(-1, -1) + V(1, 1) - V(1, -1) + V(-1, 1) - V(1, 1) + V(-1, -1) - V(-1, 1) =$$

$$= 0.$$

Priamy výpočet však dáva $H = 2\pi$. Takže pole $\mathbf{T}$ nemá na M potenciál (dokonca v žiadnom redukovanom okolí bodu (0,0)). Fyzikálne H vyjadruje prácu poľa po obvode štvorca okolo počiatku. Lokálne je síce dané pole na M potenciálové, ale globálne potenciálové nie je.

Poznámka 4.2.10 (Ako hľadať potenciál ?).

Nech je splnená nutná (aj postačujúca) podmienka potenciálnosti poľa (na nejakom intervale v $\mathbb{R}^3$). Nech $n = 3$, potom $V(x, y, z) = \int T_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x + C(y, z)$, kde prvý člen je pre každé (y, z) nejaká pevne zvolená primitívna funkcia k T_1, ktorá má deriváciu podľa y aj z. Ľubovoľná iná primitívna funkcia k T_1 sa líši o konštantu, tá však môže závisieť od y, z. Pre $C(y, z)$ dostaneme z podmienky $\dfrac{\partial V}{\partial y} = T_2$

$$T_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\int T_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}C(y, z).$$

Takže pre $H(y, z) = T_2(x, y, z) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int T_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x$ máme

$$C(y, z) = \int H(y, z)\,\mathrm{d}y + D(z).$$

Následne z podmienky $\dfrac{\partial V}{\partial z} = T_3$ dostaneme tvar funkcie D:

$$T_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\int T_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial z}\int H(y, z)\,\mathrm{d}y + D'(z).$$

Ukážeme si ešte metódu integrovania istej triedy diferenciálnych rovníc prvého rádu - teda spôsob ako nájsť riešenie. Pre spojité funkcie $M(x, y), N(x, y)$ uvažujme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad N \neq 0, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}, \quad M \neq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Geometrický význam rovníc: vektor $\left(1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ je dotykovým vektorom ku grafu funkcie $y(x)$ a teda vyjadruje to, že dotykový vektor ku grafu riešenia prvej rovnice je ortogonálny k poľu (M, N). Podobne je to u druhej rovnici. Po úprave rovnice (4.1) vyjadrujú to isté a síce

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Ak je pole (M, N) potenciálové, potom ľavá strana je totálnym diferenciálom potenciálu V poľa (M, N) - preto sa takéto rovnice nazývajú rovnice v tvare totálneho diferenciálu, alebo exaktné diferenciálne rovnice.

Veta 4.2.11.

Ak je pole (M, N) spojité a potenciálové na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(x_0, y_0)^2 + N(x_0, y_0)^2 \neq 0$$

a V je jeho potenciál na danom okolí. Potom pre $N(x_0, y_0) \neq 0$ $(M(x_0, y_0) \neq 0\,)$ prvá (druhá) z rovníc (4.1) má ne nejakom okolí bodu x_0 (y_0) práve jedno riešenie splňujúce $y(x_0) = y_0$ $(x(y_0) = x_0)$ dané rovnicou $V(x, y) = V(x_0, y_0)$.

Poznámka 4.2.12.

Ak platí $M(x_0, y_0)^2 + N(x_0, y_0)^2 \neq 0$ v okolí bodu (x_0, y_0), potom rovnica $V(x, y) = V(x_0, y_0)$ určuje jak funkciu $y(x)$, tak funkciu $x = g(y)$. Tieto funkcie sú k sebe navzájom inverzné a ich grafy sú rovnaké v dostatočne malom okolí bodu (x_0, y_0).

Príklad 4.2.13.

Nájdime riešenie rovnice $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ prechádzajúce bodom $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Potenciál poľa (x, y) je $V = \frac{x^2+y^2}{2}$. Riešenie je dané vzťahom $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ a vyjadruje ho krivka - časť kružnice.

Otázkou je, čo v prípade, že pole (M, N) nie je potenciálové ? Pozrime sa na nasledujúci príklad.

Príklad 4.2.14.

Ľahko sa presvedčíme, že pole $\mathbf{T}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right)$ nemá potenciál. Ale pole $\tilde{\mathbf{T}}(x, y) = x^2\mathbf{T}(x, y) = (x, y)$ ho má.

Takže prirodzene zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 4.2.15.

Funkciu $\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nazývame integračným faktorom poľa $\mathbf{T}$ na množine $M \subset \mathbb{R}^m$, ak pole $\tilde{\mathbf{T}} = \mu\,\mathbf{T}$ má na M potenciál.

Z vety 4.2.7 dostávame nasledujúcu nutnú podmienku pre to, aby nejaká funkcia bola integračným faktorom.

Veta 4.2.16.

Ak sú parciálne derivácie poľa $\mathbf{T}$ spojité na $M \subset \mathbb{R}^n$. Aby funkcia $\mu : M \to \mathbb{R}$ so spojitými parciálnymi deriváciami na M bola integračným faktorom, musí platiť

$$\frac{\partial(\mu\, T_j)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(\mu\, T_i)}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M, \; i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Potom pre $\mu(x, y) \neq 0$ máme ekvivalentne rovnicu

$$\mu M \, \mathrm{d}x + \mu N \, \mathrm{d}y = 0.$$

Ak je teda $\mu(x, y)$ integračný faktor poľa (M, N), potom z rovníc (4.1) máme riešenie dané implicitne rovnicou $V(x, y) = V(x_0, y_0)$, kde V je potenciál poľa $(\mu\, M, \mu\, N)$. Teda podľa vety 4.2.16 existuje integračný faktor a je riešením rovnice

$$\mu_y M - \mu_x N + \mu(M_y - N_x) = 0. \tag{4.2}$$

To je síce parciálna diferenciálna rovnica 1. rádu a jej určenie je vo všeobecnosti ťažké, ale je v špeciálnom tvare a to nám pomôže.

Metóda I.

Hľadajme $\mu(x, y)$, ktoré závisí iba na x resp. y. Dosadením takého μ do (4.2) dostaneme ODR, ktorých riešenie vieme nájsť. Teda máme $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int H(x)\, \mathrm{d}x}, \;\; H(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$. Analogicky sa odvodí podmienka pre tvar integračného faktora závisiaceho iba na y.

Problém 4.2.17.

Nájdite touto metódou integračný faktor pre rovnicu (vyriešte ju)

$$\left(x^2 y + 2xy + \frac{y^3}{3}\right) \mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}y = 0.$$

Metóda II.

Problém 4.2.18.

Ukážte, že pole (M, N) má IF závisiaci iba na danej funkcii $\phi(x, y)$ (tj. tvaru $\mu = H(\phi(x, y))$, kde H je funkcia jednej premennej) vtedy a len vtedy, keď funkcia $\frac{N_x - M_y}{M\phi_y - N\phi_x}$ závisí iba na $\phi(x, y)$.

Príklad 4.2.19.

Majme pole $(M, N) = (x^2 + y^2 + x, y)$. Pole možno zapísať v tvare $(M_1 + M_2, N_1 + N_2)$, kde $(M_1, N_1) = (x^2 + y^2, 0)$ a $(M_2, N_2) = (x, y)$. Keďže druhé z polí je potenciálové s $V_2 = \frac{x^2+y^2}{2}$, hľadáme integračný faktor v tvare $\mu(x, y) = h(x^2 + y^2), y \neq 0$. Dostaneme tak ODR

$$(x^2 + y^2)\, h'(x^2 + y^2) + h(x^2 + y^2) = 0.$$

Tá má riešenie $h(x^2+y^2) = \frac{\text{konšt.}}{x^2+y^2}$. Tomuto integračnému faktoru odpovedá potenciál $W(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + x$ poľa $\left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Riešenie rovnice

$$(x^2 + y^2 + x)\, \mathrm{d}x + y\, \mathrm{d}y = 0$$

je preto dané rovnicou

$$\frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + x = \text{konšt.}\ .$$

Metóda III.

Metóda použitím "inšpekcie". Ukážeme si ju na príklade.
Rovnicu

$$x\, \mathrm{d}x + y\, \mathrm{d}y = m(x\, \mathrm{d}y - y\, \mathrm{d}x)$$

prepíšeme na tvar

$$\mathrm{d}(x^2 + y^2) = 2mx^2\, \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Predelením oboch strán výrazom (IF) $x^2 + y^2$ dostaneme exaktnú rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{2m\, \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \leftrightarrow \mathrm{d}\left\{\ln(x^2 + y^2) - 2m \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = 0.$$